

# КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## Основные законы и формулы

1 Средняя скорость

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

2 Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

3 Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad v = \frac{ds}{dt}$$

4 Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad a = \frac{dv}{dt}$$

5 Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

где  $a_n = \frac{v^2}{R}$  – нормальное ускорение,  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$  – тангенциальное ускорение.

6 Для прямолинейного равномерного движения

$$v = \frac{s}{t} = \text{const}; \quad a = 0$$

7 Для прямолинейного равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \quad v = v_0 \pm at; \quad a = \text{const}$$

8 Угловая скорость при вращательном движении

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

9 Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

10 Соотношение между линейной и угловой скоростями

$$v = \omega R$$

11 Соотношение между угловым, тангенциальным и нормальным ускорениями

$$a_{\tau} = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R$$

12 В случае равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n, \quad \varphi = 2\pi N$$

где  $T$ - период,  $n$ - частота вращения,  $N$  – число оборотов

13 Для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

### Примеры решения задач

Задача 1. Движение материальной точки, перемещающейся по прямой задано уравнением  $S = 4t^3 + 2t + 1$  (1). Найти в интервале времени, начиная от 1с до 2с: мгновенные скорости в начале и в конце интервала; среднюю скорость движения; мгновенное ускорение в начале и в конце заданного интервала времени.

Решение.

Находим мгновенную скорость, как производную от пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}; \quad (2) \quad v = 12t^2 + 2 \quad (3)$$

Для вычисления средней скорости движения надо найти отношение пути ко времени, в течение которого он пройден:  $\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$  (4)

По формуле (3) вычисляем скорости в начале и в конце интервала времени ( $t_0 = 1с; t = 2с$ ):  $v_0 = 12 \cdot 1^2 + 2 = 14$  м/с;  $v = 12 \cdot 2 + 2 = 50$  м/с.

Для определения средней скорости находим путь, проходимый за время от  $t_0 = 1с$  до  $t = 2с$ , используя уравнение (1). Этот путь равен:

$S = 4(t^3 - t_0^3) + 2(t - t_0) = 4(2^3 - 1^3) + 2(2 - 1) = 30$  м. По формуле (4) вычисляем

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{30}{1} = 30 \text{ м/с.}$$

Мгновенное ускорение определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени:

$$a = \frac{dv}{dt}; \quad (5) \quad a = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (6)$$

Используя (3), находим  $a = 24t$ . В начале и в конце заданного интервала времени ускорение равно:  $a_0 = 24$  м/с<sup>2</sup>;  $a = 24 \cdot 2 = 48$  м/с<sup>2</sup>

Ответ:  $v_0 = 14$  м/с;  $v = 50$  м/с;  $\langle v \rangle = 30$  м/с;  $a_0 = 24$  м/с<sup>2</sup>;  $a = 48$  м/с<sup>2</sup>.

Задача 2. По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям  $x_1=A_1+B_1t+C_1t^2$ ;  $x_2=A_2+B_2t+C_2t^2$ , где  $A_1=10\text{м}$ ;  $B_1=1\text{м/с}$ ;  $C_1=1,2\text{м/с}^2$ ;  $A_2=3\text{м}$ ;  $B_2=2\text{м/с}$ ;  $C_2=0,2\text{м/с}^2$ . В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковы? Найти ускорения  $a_1$  и  $a_2$  этих точек в момент  $t=3\text{с}$ .

Решение.

$A_1=10\text{м}$	Мгновенная скорость равна первой производной от координаты по времени: $v_1=B_1+2C_1t$ ; $v_2=B_2+2C_2t$ . По условию задачи $v_1=v_2$ ; $B_1+2C_1t=B_2+2C_2t$ , откуда $2t(C_1-C_2)=B_2-B_1$ ; $t=\frac{B_2-B_1}{2(C_1-C_2)}$ .
$B_1=1\text{м/с}$	
$C_1=1,2\text{м/с}^2$	
$A_2=3\text{м}$	
$B_2=2\text{м/с}$	Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени: $a_1=2C_1$ , $a_2=2C_2$ .
$C_2=0,2\text{м/с}^2$	
$t=? a_1=? a_2=?$	

Вычисления:

$$t = \frac{2-1}{2(1,2-0,2)} = 0,5 \text{ с}$$

$$a_1 = 2 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ м/с}^2; \quad a_2 = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Ускорения  $a_1$  и  $a_2$  не зависят от времени и в любой момент времени  $a_1=2,4\text{м/с}^2$ ,  $a_2=0,4\text{м/с}^2$ .

Ответ:  $t=0,5\text{с}$ ;  $a_1=2,4\text{м/с}^2$ ,  $a_2=0,4\text{м/с}^2$ .

Задача 3. Тело падает с высоты 49м. Определить перемещение тела в последнюю секунду падения.

Решение.

$h=49\text{м}$	Уравнение движения тела при свободном падении без начальной скорости $h = \frac{gt^2}{2}$ (1)
$\Delta t=1\text{с}$	
$\Delta h=?$	

За время  $(t-\Delta t)$  тело пройдет путь  $h_1 = \frac{g(t-\Delta t)^2}{2}$  (2)

Тогда  $\Delta h = h - h_1 = \frac{g(t^2 - (t-\Delta t)^2)}{2} = \frac{g(2t - \Delta t)\Delta t}{2}$  (3)

Время падения  $t$  тела с высоты  $h$  найдем из уравнения (1):  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  и подставим

в уравнение (3):  $\Delta h = \frac{g}{2} \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} - \Delta t \right) \Delta t$

Анализ единиц:  $[h] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \left( \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}} - \text{с} \right) \cdot \text{с} = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2} = \text{м}$

Вычисления: 
$$\Delta h = \frac{9,8}{2} \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 49}{9,8}} - 1 \right) \cdot 1 = 4,9 \text{ м.}$$

Ответ:  $\Delta h = 4,9 \text{ м}$

Задача 4. Маховик, вращающийся с частотой  $2\text{с}^{-1}$ , останавливается в течение 1,5мин. Считая движение равнозамедленным, определить, сколько оборотов сделает маховик до полной остановки и каково ускорение маховика.

Решение.

$$\begin{array}{l} n = 2\text{с}^{-1} \\ t = 1,5\text{мин} = 90\text{с} \\ N - ? \quad \varepsilon - ? \end{array}$$

Уравнения движения маховика имеют вид:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (1)$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t \quad (2)$$

Принимая во внимание, что  $\omega = 0$  и  $\omega_0 = 2\pi n$ , из уравнения (2) найдем

$\varepsilon = -\frac{2\pi n}{t}$ . Учитывая, что  $\varphi = 2\pi N$ , находим число оборотов

$$2\pi N = \frac{2\pi n t^2}{2t}; \quad N = \frac{n t}{2}.$$

Анализ единиц:  $[\varepsilon] = \frac{\text{с}^{-1}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}^2} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}, \quad [N] = \text{с}^{-1} \cdot \text{с} = 1$

Вычисления:  $N = 2 \cdot \frac{90}{2} = 90; \quad \varepsilon = -\frac{6,28 \cdot 2}{90} = -0,14 \text{ рад/с}^2.$

Знак минус указывает на то, что маховик вращался замедленно.

Ответ:  $\varepsilon = -0,14 \text{ рад/с}^2.$

Задача 5. Диск радиусом 0,2м вращается согласно уравнению  $\varphi = A + Bt + Ct^3$ , где  $A = 3 \text{ рад}$ ,  $B = -1 \text{ рад/с}$ ,  $C = 0,1 \text{ рад/с}^3$ . Определить тангенциальное  $a_\tau$ , нормальное  $a_n$  и полное  $a$  ускорения точек на окружности диска для момента времени  $t = 10 \text{ с}$ .

Решение.

$$\begin{array}{l} A = 3 \text{ рад} \\ B = -1 \text{ рад/с} \\ C = 0,1 \text{ рад/с}^3 \\ t = 10 \text{ с} \\ R = 0,2 \text{ м} \\ a_\tau - ? \quad a_n - ? \quad a - ? \end{array}$$

Найдем угловую скорость как первую производную от угла

поворота по времени: 
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2$$

и угловое ускорение как первую производную от угловой

скорости по времени: 
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct.$$

Линейную скорость  $v$  найдем, пользуясь ее связью с угловой скоростью:

$$v = \omega \cdot R = R \cdot (B + 3Ct^2).$$

Найдем тангенциальное ускорение  $a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \cdot 6Ct.$

Нормальное ускорение найдем по формуле:  $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (B + 3Ct^2)^2 \cdot R.$

Полное ускорение точек на окружности:  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Анализ единиц:  $[a_\tau] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^3} \cdot \text{м} \cdot \text{с} = \text{м}/\text{с}^2;$   $[a_n] = \text{м}/\text{с}^2.$

Вычисления:  $a_\tau = 0,2 \cdot 6 \cdot 0,1 \cdot 10 = 1,2 \text{ м}/\text{с}^2;$   $a_n = 0,2 \cdot (-1 + 3 \cdot 0,1 \cdot 100) = 5,8 \text{ м}/\text{с}^2;$   
 $a = \sqrt{1,2^2 + 5,8^2} = \sqrt{35,08} = 5,9 \text{ м}/\text{с}^2.$

Ответ:  $a_\tau = 1,2 \text{ м}/\text{с}^2;$   $a_n = 5,8 \text{ м}/\text{с}^2;$   $a = 5,9 \text{ м}/\text{с}^2.$

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А1 Основные физические постоянные

Физические постоянные	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	$g$	$9,81\text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R$	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$e$	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная Вина	$b$	$2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
	$c$	$1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R$	$3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$
	$R'$	$1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Боровский радиус	$a_0$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 эВ)
Атомная единица массы	1 а.е.м.	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ (0,00055 а.е.м.)
Масса покоя протона	$m_p$	$1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (1,00728 а.е.м.)
Масса покоя нейтрона	$m_n$	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (1,00867 а.е.м.)
Масса покоя $\alpha$ -частиц	$m_\alpha$	$6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (4,00149 а.е.м.)

Таблица А2 Соотношение между внесистемными единицами и единицами СИ

1 л =  $10^{-3}$  м<sup>3</sup>  
1 атм =  $1,01 \cdot 10^5$  Па

1 эВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж  
1 Å =  $10^{-10}$  м

1 мм.рт.ст. = 133 Па

Таблица А3 Молярная масса, эффективный диаметр молекул некоторых газов

Газ	$\mu \cdot 10^{-3}$ , кг/моль	$d \cdot 10^{-10}$ , м	Газ	$\mu \cdot 10^{-3}$ , кг/моль	$d \cdot 10^{-10}$ , м
Водород	2	2,3	Аргон	40	3,5
Гелий	4	1,9	Воздух	29	2,7
Азот	28	3,0	Углекислый газ	44	
Кислород	32	2,7	Пары воды	18	3,0
Неон	20				

Таблица А4 Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость $\epsilon$	Вещество	Проницаемость $\epsilon$
Вода	81	Слюда	7
Парафин	2	Кварц	4,5
Стекло	7	Воск	3

Таблица А5 Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Медь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Алюминий	$2,53 \cdot 10^{-8}$
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$	Свинец	$2,2 \cdot 10^{-8}$

Таблица А6 Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,44
Вода	1,33	Стекло	1,50

Таблица А7 Работа выхода электронов

Металл	$A \cdot 10^{-19}$ Дж	$A$ , эВ	Металл	$A \cdot 10^{-19}$ Дж	$A$ , эВ
Вольфрам	7,2	4,5	Рубидий	3,4	2,1
Калий	3,5	2,2	Серебро	4,7	7,5
Литий	3,7	2,3	Цезий	3,2	2,0
Натрий	4,0	2,5	Цинк	6,4	4,0
Платина	10,1	6,3			

Таблица А8 Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименование

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
Гига	Г	$10^9$	деци	д	$10^{-1}$
Мега	М	$10^6$	санتي	с	$10^{-2}$
Кило	к	$10^3$	милли	м	$10^{-3}$
			микро	мк	$10^{-6}$
			нано	н	$10^{-9}$
			пико	п	$10^{-12}$